

VIII. ZASTOSOWANIA MATEMATYKI

ZDARZENIA LOSOWE:

Obliczając prawdopodobieństwo musimy ustalić, ile jest wszystkich możliwych wyników w opisanym zdarzeniu, ile z tych wyników spełnia podany warunek i obliczyć odpowiedni iloraz:

$$P = \frac{n}{N} \quad \text{– wzór na prawdopodobieństwo, że wynik spełni określony warunek}$$

n – liczba wyników spełniających podany warunek

N – liczba wszystkich możliwych wyników

Zad.1. Rzucamy sześcienną kostką do gry.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania jedynki lub szóstki?

b) Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej 3 oczek?

c) Jakie jest prawdopodobieństwo, że liczba oczek będzie mniejsza od 7?

Zad.2. Rzucamy raz dwiema różnymi monetami. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadną dwie reszki?

Zad.3. Rzucamy monetą i kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że otrzymamy orła i szóstkę?

Zad.4. Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ losujemy jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby pierwszej?

Zad.5. Z klasy, w której jest 17 dziewczynek i 13 chłopców wybieramy jedną osobę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie to:

a) chłopiec

b) dziewczynka

Zad.6. W pojemniku znajdują się 4 kule białe, 5 kul czarnych i 7 zielonych. Losujemy jedną kulę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosujemy kulę:

a) białą

b) czarną

c) nie zieloną

Zad.7. W urnie jest 50 losów. Szansa wyciągnięcia losu wygrywającego wynosi 20%. Uczeń wyciągnął jeden pusty los. Określ, czy przy drugim losowaniu prawdopodobieństwo wygranej rośnie, czy maleje. Oblicz prawdopodobieństwo wygranej w drugim losowaniu.

Zad.8. W loterii jest 100 losów, w tym 10 wygrywających. Ile losów wygrywających należy dołożyć do całej puli, aby szansa wyciągnięcia losu wygrywającego była równa 25%.

ZADANIA CKE:

maj 2023

Zadanie 11. (0–1)

Z urny, w której jest wyłącznie 18 kul białych i 12 kul czarnych, losujemy 1 kulę.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej jest równe $\frac{3}{5}$.	P	F
Prawdopodobieństwo wylosowania kuli czarnej jest mniejsze od $\frac{1}{3}$.	P	F

czerwiec 2023

Zadanie 10. (0–1)

Spośród wszystkich liczb dwucyfrowych dodatnich losujemy jedną liczbę.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej przez 20 jest równe

- A. $\frac{2}{45}$ B. $\frac{1}{25}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{4}{99}$

maj 2024

Zadanie 8. (0–1)

Karolina kupiła jedno pudełko balonów. W tabeli podano informacje dotyczące kolorów balonów oraz ich liczby w tym pudełku.

	czerwony	niebieski	zielony	żółty
Kolor balonu				
Liczba balonów	10	8	6	8

Karolina wyjmowała losowo po jednym balonie z pudełka. Pierwsze dwa wyjęte balony były w kolorze czerwonym.

Jakie jest prawdopodobieństwo, że trzeci balon losowo wyjęty przez Karolinę będzie w kolorze czerwonym? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{5}{16}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{1}{4}$

Zadanie 10. (0–1)

Na loterię przygotowano 72 losy i ponumerowano je kolejnymi liczbami naturalnymi od 1 do 72. Wygrywają losy o numerach od 1 do 9 i od 46 do 72. Pozostałe losy są puste. Ada jako pierwsza wyciąga jeden los.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Prawdopodobieństwo wyciągnięcia przez Adę losu pustego jest równe

A. $\frac{26}{72}$

B. $\frac{27}{72}$

C. $\frac{35}{72}$

D. $\frac{36}{72}$

Zadanie 6. (0–1)

W pudełku jest 18 kart jednakowej wielkości. Na każdej z nich narysowano jedną figurę geometryczną. Wśród tych kart

- jest pięć kart z narysowanym trójkątem równobocznym o boku długości 6 cm
- są cztery karty z narysowanym kwadratem o boku długości 7 cm
- jest dziewięć kart z narysowanym pięciokątem foremnym o boku długości 2 cm.

Z pudełka wylosowano jedną kartę.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Prawdopodobieństwo, że wylosowano kartę z narysowanym kwadratem, jest równe

A	B
---	---

.

A. $\frac{1}{18}$

B. $\frac{2}{9}$

Prawdopodobieństwo, że wylosowano kartę z narysowaną figurą o obwodzie mniejszym od 18 cm, jest równe

C	D
---	---

.

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{7}{9}$

ZAMIANA JEDNOSTEK:

Czas:

$$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$$

$$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3600 \text{ s}$$

$$1 \text{ doba} = 24 \text{ h}$$

$$1 \text{ kwadrans} = 15 \text{ min}$$

Masa:

$$1 \text{ dag} = 10 \text{ g}$$

$$1 \text{ kg} = 100 \text{ dag} = 1000 \text{ g}$$

$$1 \text{ tona} = 1000 \text{ kg}$$

Długość:

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm}$$

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm} = 100 \text{ mm}$$

$$1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm}$$

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

Powierzchnia:

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2 = 10\,000 \text{ mm}^2$$

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$$

$$\text{ar: } 1 \text{ a} = 100 \text{ m}^2$$

$$\text{hektar: } 1 \text{ ha} = 100 \text{ a} = 10\,000 \text{ m}^2$$

Objętość:

$$1 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3 = 1\,000\,000 \text{ mm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3 = 1\,000\,000 \text{ cm}^3$$

$$\text{litr: } 1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$$

$$\text{mililitr: } 1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$$

PRĘDKOŚĆ, DROGA I CZAS:

Prędkość obiektu wyraża, jaką odległość (drogę) pokonuje ten obiekt w pewnej jednostce czasu. Prędkość 80 km/h oznacza, że w ciągu godziny obiekt przebędzie dystans 80 km.

W obliczeniach możemy posłużyć się wzorem z fizyki:

$$s = v \cdot t \quad \text{z przekształceniami:} \quad v = \frac{s}{t} \quad \text{i} \quad t = \frac{s}{v}$$

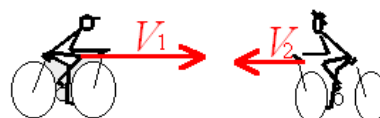
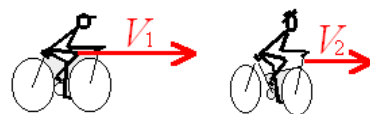
gdzie: s – to droga, v – to prędkość, t – to czas.

Przy stałej prędkości droga jaką pokonał obiekt jest wprost proporcjonalna do czasu, w którym to nastąpiło, gdyż $v = \frac{s}{t}$.

W danym czasie droga jaką pokonał obiekt jest wprost proporcjonalna do prędkości, z jaką się poruszał, gdyż $t = \frac{s}{v}$.

Obserwując, czy rozważając ruch, dostrzegamy również takie sytuacje jak: mijanie się, wyprzedzanie, doganianie, spotkanie i oddalenie się obiektów od siebie i wtedy:

- gdy prędkości są zgodne, to obiekty przybliżają się do siebie, wyprzedzają się i oddalają się od siebie różnicą prędkości: $v_1 - v_2$
- gdy prędkości są przeciwne, to obiekty zbliżają się do siebie, mijają się i oddalają się od siebie po minięciu się sumą prędkości: $v_1 + v_2$



Zadanie 9.

Pieszy przeszedł 2,4 km w ciągu pół godziny. Z jaką średnią prędkością w m/min się poruszał?

Zadanie 10.

Pewien samochód przejechał 140 km ze średnią prędkością 2 km/min. Obliczmy, ile czasu trwała ta podróż.

Zadanie 11.

Janek szedł z prędkością 60 m/min. Jaką drogę pokonał w 10 min, a jaką w 2h.

Zadanie 12.

Ola idzie do szkoły z prędkością 1,5 m/s. Dom Oli jest odległy od szkoły o 0,9 km. O której godzinie najpóźniej Ola musi wyjść z domu, aby zdążyć do szkoły na godzinę 9:00?

Zadanie 13.

Krzyś goni Kubę. Krzyś biegnie z prędkością 6 m/s, a Kuba ucieka przed nim prędkością 2 m/s. Po jakim czasie Krzyś dogoni Kubę, jeśli początkowo byli oddaleni od siebie o 60 m?

Zadanie 14.

Kamil i Tomek zaczęli biec naprzeciw siebie z odległości 200 m. Kamil biegł z prędkością 6 m/s, a Kuba z prędkością 4 m/s. Po jakim czasie chłopcy się spotkali?

Zadanie 15.

Dwa pociągi ruszyły jednocześnie z tej samej stacji, ale w przeciwnych kierunkach. Jaka będzie odległość między nimi po 2 godzinach, jeśli jeden pociąg jedzie prędkością 80 km/h, a drugi z prędkością 90 km/h?

czerwiec 2023

Zadanie 11. (0–1)

Samochód przejechał ze stałą prędkością trasę o długości 18 kilometrów w czasie 12 minut.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Samochód przejechał tę trasę z prędkością

A. $30 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

B. $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

C. $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

D. $120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

grudzień 2024

Zadanie 14. (0–1)

Odcinkowy pomiar prędkości polega na wyznaczeniu średniej prędkości samochodu na określonym odcinku drogi. Na początku i na końcu takiego odcinka ustawiono znaki drogowe informujące o rozpoczęciu i zakończeniu pomiaru (zobacz rysunek).



Samochód osobowy przejechał w 2 minuty taki odcinek drogi o długości 3 km.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Wyznaczona prędkość tego samochodu na objętym pomiarem odcinku drogi była równa

A. $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

B. $60 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

C. $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

D. $150 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

maj 2025

Zadanie 9. (0–1)

Rowerzysta pokonał odcinek drogi o długości 100 m z prędkością $5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Rowerzysta pokonał ten odcinek drogi w czasie

A. 50 sekund.

B. 20 sekund.

C. 500 sekund.

D. 200 sekund.

SKALA:

Skala 1:5000 oznacza, że obiekt na mapie ma wymiary 5000 razy mniejsze od wymiarów rzeczywistych, więc 1 cm na mapie – to 5000 cm (50 m) w rzeczywistości.

Uwaga:

Skala informuje nas o stosunku długości, a nie powierzchni!

ZADANIA CKE:

Zadanie 17.

Na planie sporządzonym w skali 1:750 kwadrat przedstawiający lądowisko dla helikopterów ma bok o długości 4 cm.

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

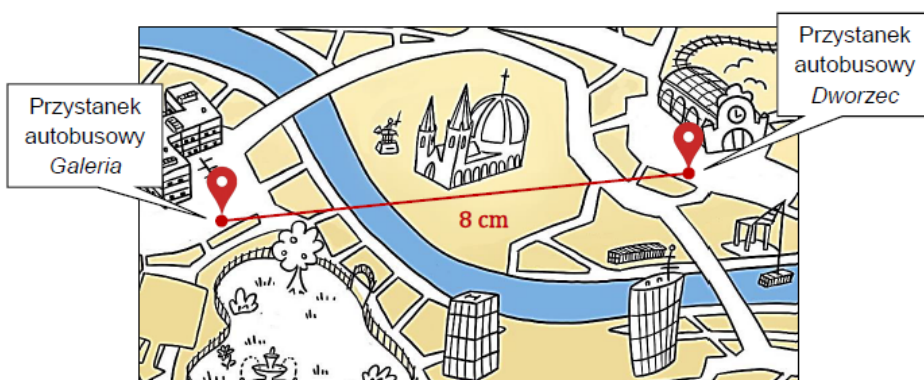
Rzeczywista powierzchnia tego lądowiska to 9 arów.	P	F
Na planie w skali 1:500 bok lądowiska ma długość 3 cm.	P	F

maj 2023

Zadanie 10. (0–1)

Na planie miasta odległość w linii prostej od punktu oznaczającego przystanek autobusowy *Dworzec* do punktu oznaczającego przystanek autobusowy *Galeria* jest równa 8 cm.

Plan miasta został wykonany w skali 1 : 4 000.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Odległość w linii prostej w terenie między tymi przystankami jest równa

A. 320 m

B. 500 m

C. 3 200 m

D. 5 000 m

Zadanie 12. (0–1)

Na planie miasta wykonanym w skali 1:5000 odległość w linii prostej między punktem oznaczającym wejście do papugarni a punktem oznaczającym wejście do muzeum zabawek jest równa 8,4 cm.

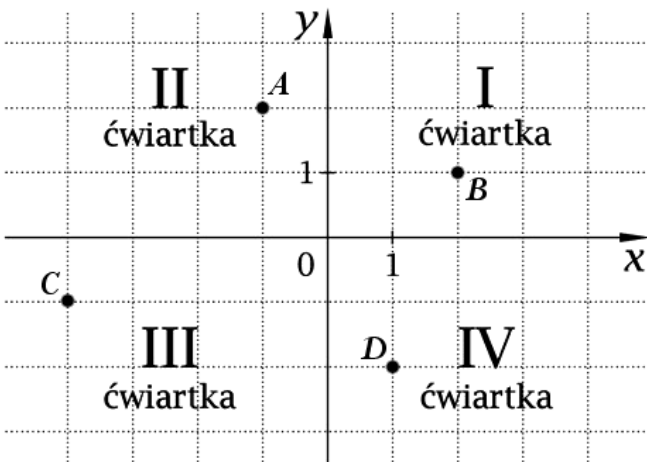
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

W terenie odległość między wejściami do tych obiektów jest w linii prostej równa

- A. 4,2 m B. 42 m C. 420 m D. 4200 m

UKŁAD WSPÓLRZĘDNYCH:

Za pomocą liczb, można określać położenie punktów na płaszczyźnie. Potrzebne są do tego dwie osie tworzące **układ współrzędnych**.



Punkt przecięcia osi nazywamy **początkiem układu współrzędnych**.

Położenie każdego punktu na płaszczyźnie określają dwie liczby, zwane **współrzędnymi** punktu (x, y) .

Pierwsza x jest odczytywana na osi poziomej, druga y jest odczytywana na osi pionowej.

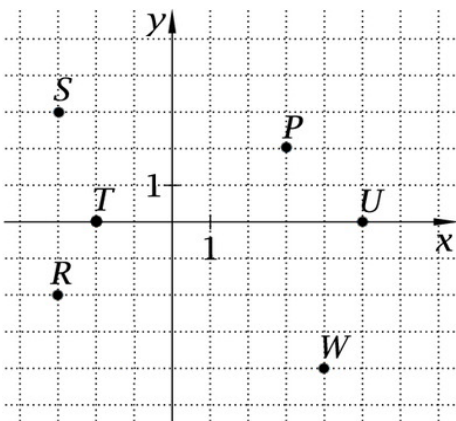
$$A = (-1, 2) \quad B = (2, 1),$$

$$C = (-4, -1) \quad D = (1, -2)$$

Osie dzielą układ współrzędnych na 4 części, nazywane **ćwiartkami**.

Zadanie 18.

Odczytaj współrzędne punktów zaznaczonych na rysunku.



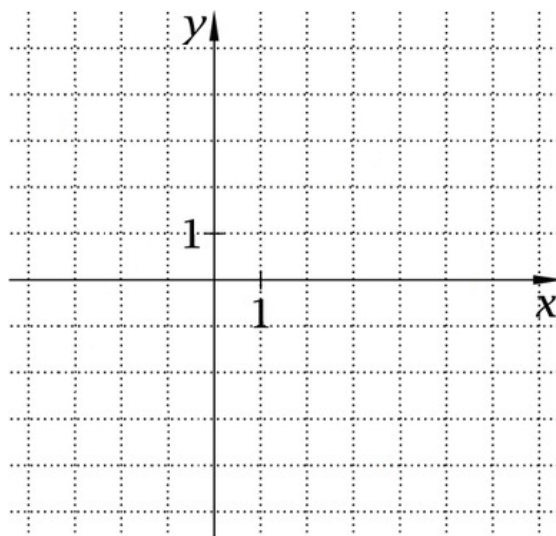
Zadanie 19.

Punkty A , B i C są wierzchołkami pewnego prostokąta. Jakie współrzędne ma czwarty wierzchołek? Oblicz obwód i pole otrzymanego prostokąta.

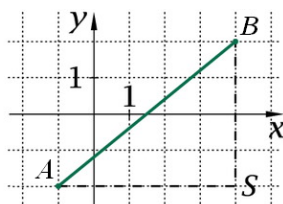
$$A = (-3, -2)$$

$$B = (4, -2)$$

$$C = (4, 3)$$



DŁUGOŚĆ ODCINKA W UKŁADZIE WSPÓLRZĘDNYCH:



Łatwo jest określić długość odcinka, gdy jest on równoległy do jednej z osi układu współrzędnych.

Twierdzenie pitagorasa pozwala nam obliczyć długość dowolnie położonych odcinków:

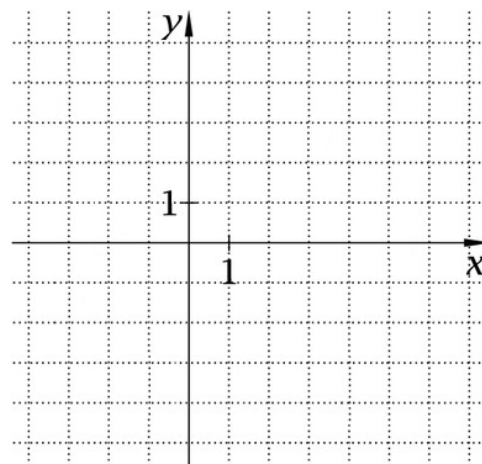
$$AB^2 = AS^2 + BS^2$$

Zauważmy, że długości odcinków AS i BS są odpowiednio różnicą współrzędnych x i y punktów A i B . Więc wzór na długość odcinka AB w układzie współrzędnych to:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

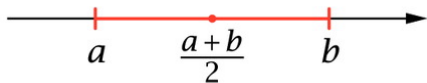
Zad.20. Oblicz długość odcinka, o podanych końcach.

$$A = (1, 4), \quad B = (5, 1)$$

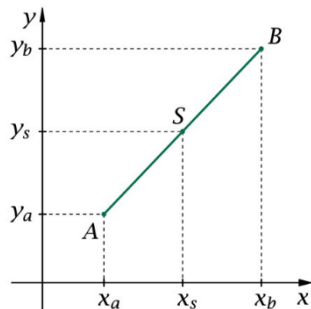


ŚRODEK ODCINKA W UKŁADZIE WSPÓLRZĘDNYCH:

Na osi liczbowej środek odcinka wyznaczonego przez dwie liczby ma współrzędną równą ich średniej arytmetycznej.



Podobnie współrzędne środka odcinka w układzie współrzędnych są średnimi arytmetycznymi współrzędnych jego końców.



$$x_s = \frac{x_a + x_b}{2}, \quad y_s = \frac{y_a + y_b}{2}$$

Zad.21. Wyznacz współrzędne środka odcinka o podanych końcach:

$$A = (7, 11), \quad B = (13, 3)$$

Zad.22. Punkt S jest środkiem odcinka AB . Oblicz jakie współrzędne ma punkt B , gdy:

$$A = (7, 11), \quad S = (10, 12)$$

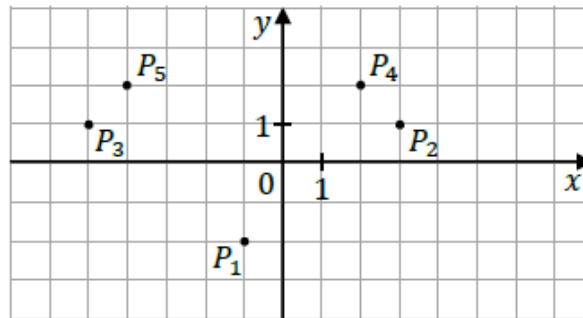
ZADANIA CKE:

maj 2024

Zadanie 12. (0–1)

W układzie współrzędnych (x, y) zaznaczono pięć punktów P_1, P_2, P_3, P_4 oraz P_5 (zobacz rysunek). Wszystkie współrzędne tych punktów są liczbami całkowitymi.

Punkt P_1 ma współrzędne $(-1, -2)$.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

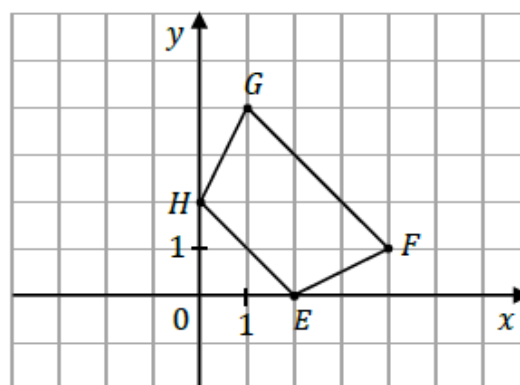
Jeżeli współrzędną x punktu P_1 zwiększymy o 4, a współrzędną y tego punktu zwiększymy o 3, to otrzymamy współrzędne punktu

- A. P_2 B. P_3 C. P_4 D. P_5

czerwiec 2024

Zadanie 11. (0–1)

W układzie współrzędnych (x, y) narysowano trapez $EFGH$. Wszystkie współrzędne wierzchołków E, F, G i H są liczbami całkowitymi.



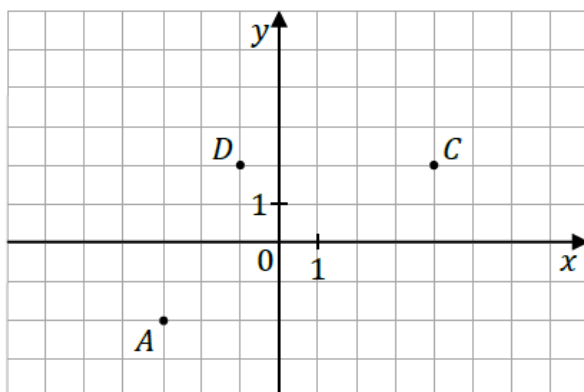
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Punkty o współrzędnych $(1, 4)$ i $(2, 0)$ to wierzchołki

- A. G i H B. G i E C. F i H D. F i E

Zadanie 14. (0–1)

W układzie współrzędnych (x, y) zaznaczono trzy punkty, które są wierzchołkami równoległoboku $ABCD$: $A = (-3, -2)$, $C = (4, 2)$, $D = (-1, 2)$ (zobacz rysunek).



Współrzędna x wierzchołka B , niezaznaczonego na rysunku, jest liczbą dodatnią.

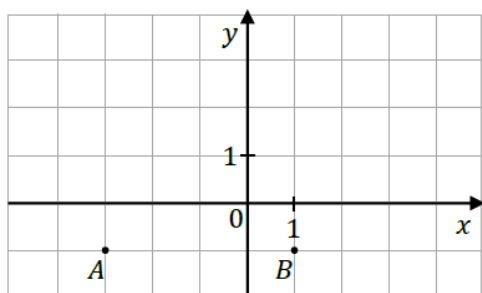
Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Niezaznaczony na rysunku wierzchołek B tego równoległoboku ma współrzędne

- A. $(4, -2)$ B. $(3, -2)$ C. $(2, -2)$ D. $(6, -2)$

Zadanie 14. (0–1)

W układzie współrzędnych (x, y) zaznaczono kolejne wierzchołki A i B pewnego czworokąta $ABCD$. Punkty A i B są punktami kratowymi. Pozostałe wierzchołki czworokąta mają współrzędne $C = (3, y_C)$ oraz $D = (-1, y_D)$, gdzie y_C jest liczbą całkowitą dodatnią oraz $y_C = y_D$.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeśli zdanie jest prawdziwe, albo F – jeśli jest fałszywe.

Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem.	P	F
Dla $y_C = y_D = 3$ czworokąt $ABCD$ jest rombem.	P	F

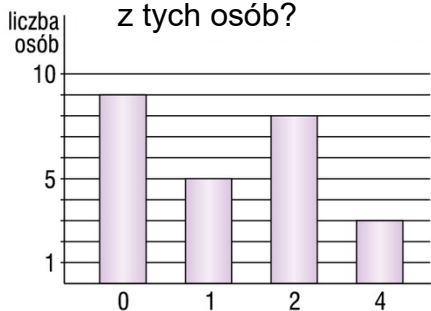
ŚREDNIA ARYTMETYCZNA:

Średnia arytmetyczna to suma wartości dzielona przez ich ilość $S_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$.

Zad.23. Uczniowie 30 osobowej klasy uzyskali następujące oceny ze sprawdzianu z chemii: 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6. Uzupełnij tabelę oraz oblicz średnią:

Ocena	1	2	3	4	5	6
Liczba uczniów						

Zad.24. Grupie dzieci zadano pytanie: *Ile pączków zjadłaś/zjadłeś w tłusty czwartek?* Wyniki tej ankiety przedstawiono na diagramie. Ile średnio pączków zjadła każda z tych osób?



Zad.25. Znajdź a wiedząc, że średnia arytmetyczna danych: 1, 4, a , 7, 2 jest równa 4,4.

Zad.26. Średnia wieku rodziców i ich dwójki dzieci jest równa 23 lata. Gdyby uwzględnić wiek dziadka, to średnia wieku wszystkich osób była by równa 31 lat. Ile lat ma dziadek?

maj 2025

Zadanie 4. (0–1)

Średnia arytmetyczna czterech liczb a , b , c , d jest równa 9, a średnia arytmetyczna dwóch liczb e i f jest równa 6.

Uzupełnij zdania. Wybierz odpowiedź spośród oznaczonych literami A i B oraz odpowiedź spośród oznaczonych literami C i D.

Suma liczb a , b , c , d jest o

A	B
---	---

 większa od sumy liczb e i f .

A. 3

B. 24

Średnia arytmetyczna liczb a , b , c , d , e , f jest równa

C	D
---	---

.

C. 8

D. 7,5

czerwiec 2025

Zadanie 1. (0–1)

Robert rozpoczął czytanie książki we wtorek i zakończył w sobotę. W tabeli podano liczbę stron, które Robert przeczytał w kolejnych dniach tygodnia od wtorku do piątku.

Dzień tygodnia	wtorek	środa	czwartek	piątek
Liczba przeczytanych stron książki	55	68	72	49

Od wtorku do soboty włącznie Robert czytał dziennie średnio 60 stron tej książki.

Ile stron tej książki Robert przeczytał w sobotę? Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

A. 46

B. 56

C. 75

D. 76

styczeń 2026

Zadanie 10. (0–1)

Na tablicy zapisano osiem liczb całkowitych dodatnich, których średnia arytmetyczna jest równa 9.

Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Po dopisaniu do tych ośmiu liczb dodatkowej liczby równej 9 średnia arytmetyczna

A. wzrośnie o 1.

B. zmaleje o 1.

C. się nie zmieni.

D. wzrośnie o 9.